P 2 - Piezoelektrizität

Ein Kristall, dessen Punktgruppe (Kristallklasse) kein Symmetriezentrum (Z) aufweist, kann prinzipiell piezoelektrisch sein. Das heißt, der auf den Kristall wirkender Zug, Druck oder, je nach Punktgruppe, die Scherkraft erzeugt eine elektrische Polarisation ^{1}P des Kristalls. Die letztere zeigt sich aus makroskopischer Sicht in Flächenladungen am Kristall. Diese Erscheinung wird direkter piezoelektrischer Effekt genannt und soll im folgenden von einem rein makroskopischen Blickwinkel aus betrachtet werden.

Zunächst soll nun die Einwirkung von Druck bzw. Zug und/oder Scherkraft in eine geeignete mathematische Form gebracht werden. Ein Druck bzw. Zug wird durch *senkrecht* auf Kristallflächen wirkende Kräfte verursacht, eine Scherkraft entsteht durch zu den Kristallflächen *parallel* wirkende Kräfte. Sinnvollerweise müssen die Einwirkungen der Bedingung gehorchen, dass der Kristall in Ruhe bleibt. Wird ein Druckzustand invertiert, so geht er in sich selbst über; diese Eigenschaft muss auch das den Spannungszustand beschreibende Objekt besitzen, woraus folgt, dass eine Scherung nicht durch eine geeignete Kombination von Zug oder Druck erzeugt werden kann, was man sich mit Hilfe von Abb. 1 klarmachen kann.

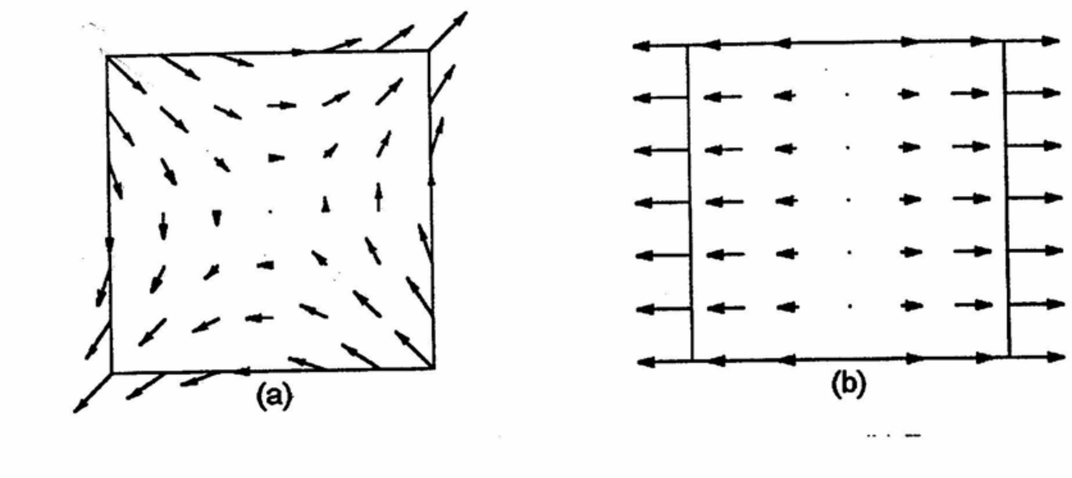


Abb. l: Spannungszustände, hervorgerufen durch (a) Scherung, (b) Zug

---

[1] Die Stufe der hier vorkommenden Tensoren wird mit der entsprechenden Zahl als Index links oben angezeigt - $^{2}\sigma$ ist beispielsweise als Tensor zweiter Stufe aufzufassen

.

Es lässt sich zeigen, dass ein Tensor 2.Stufe die Eigenschaften eines Spannungszustandes nachbilden kann. Der Spannungstensor ${}^{2}\sigma$ hat als Tensor 2.Stufe 9 Moduln, von denen nur 6 voneinander verschieden sind, wie in Abb. 2 gezeigt und in Abb. 3 veranschaulicht ist. σ_1 steht für Zug oder Druck auf die Fläche A in Richtung n_1 des Koordinatensystems. σ_2 und σ_3 stehen für Zug oder Druck längs den Richtungen n_2 und n_3 auf die Flächen, die senkrecht auf n_2 bzw. n_3 stehen. Durch die Moduln τ_4 bis τ_6 wird die Scherung des Körpers beschrieben. Die Dimension aller Komponenten von ${}^{2}\sigma$ ist Kraft pro Fläche. Es bleibt zu bemerken, dass als Tensorbezugssystem stets kartesische Koordinaten angenommen werden, so dass eine Konvention über die Orientierung von Kristallbezugssystem und Tensorbezugssystem festgelegt werden muss.

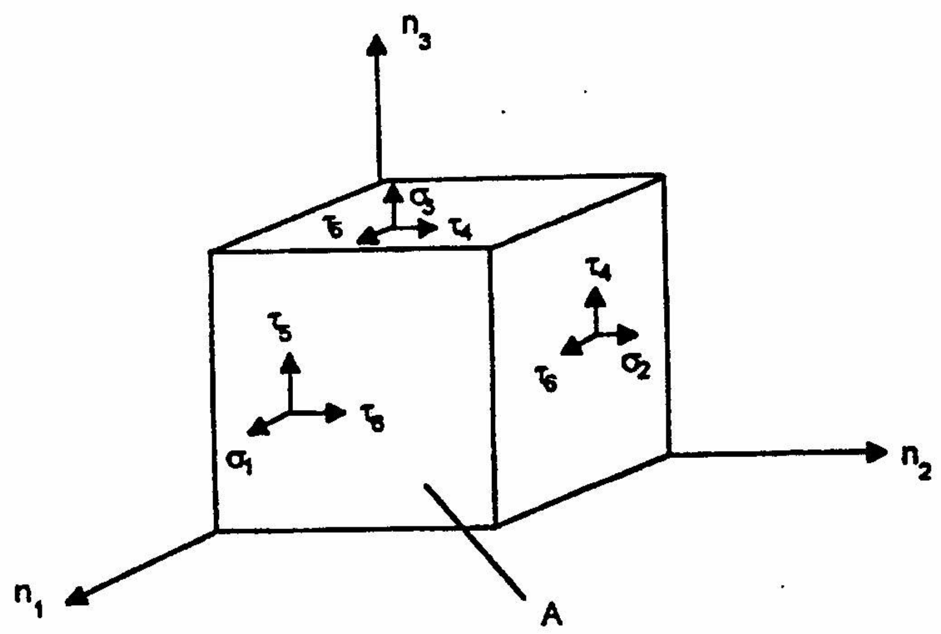


Abb.2: Die Bezeichnung der Komponenten des Spannungstensors

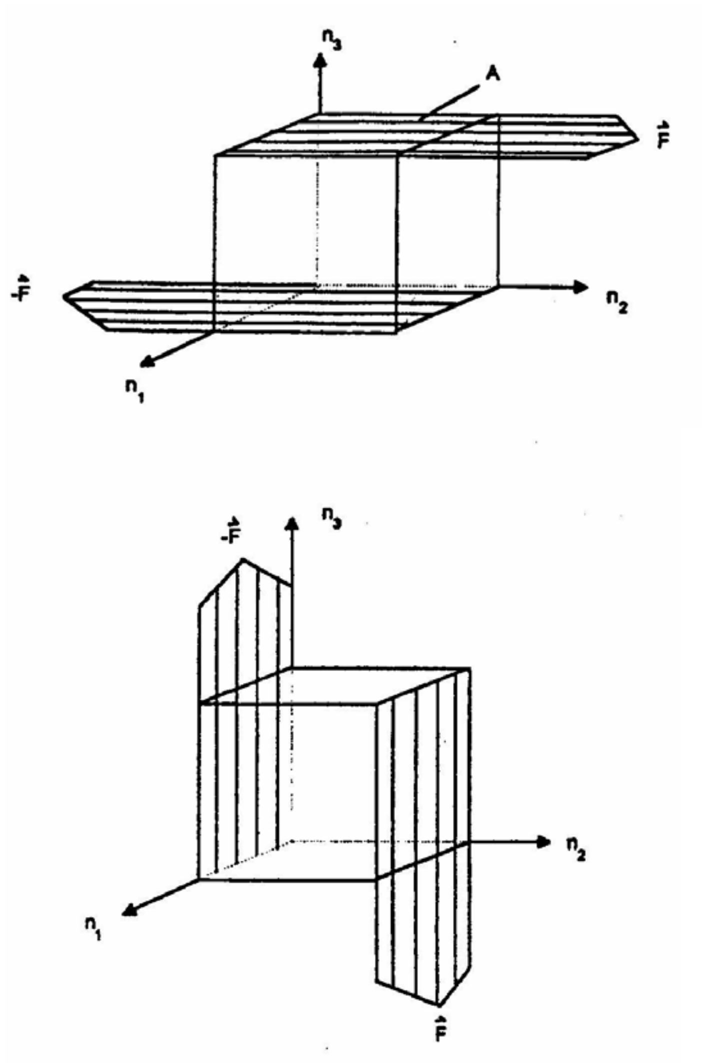


Abb.3: Äquivalente Formen für die Schubspannung τ_4

Üblicherweise werden Tensoren 2.Stufe als Matrizen dargestellt, allerdings wird hier die Konvention gewählt, ${}^2\sigma$ als 6-dimensionalen Vektor darzustellen, was nicht ganz korrekt ist, da ${}^2\sigma$ eben kein Vektortransformationseigenschaften besitzt. Die Auswirkung eines Spannungszustandes sind Oberflächenladungen ${}^1P$, mit der Dimension Ladung pro Fläche, die sich als Vektor (also als Tensor 1. Stufe) darstellen lassen. Über den Zusammenhang von ${}^1P$ und ${}^2\sigma$ werden im folgenden zwei Annahmen gemacht: Zunächst wird angenommen, dass jede Komponente von ${}^1P$ von jeder Komponente von ${}^2\sigma$ abhängen kann. Weiterhin soll der Zusammenhang zwischen den Komponenten stets durch Proportionalität gekennzeichnet sein. Eine solche Beziehung zwischen einem Tensor 1. Stufe, der Polarisation ${}^1P$, sowie einem Tensor 2. Stufe, dem Spannungstensor ${}^2\sigma$ wird durch einen Tensor 3. Stufe vermittelt, den sogenannten piezoelektrischen Tensor ${}^3d$. Dieser stellt eine Materialeigenschaft dar.

Für die Beziehung zwischen der von außen erzeugten mechanischen Spannung im Kristall und der am Kristall auftretenden elektrischen Polarisation gilt also unter Berücksichtigung der gemachten Annahmen:

$$^{1}P = {}^{3}d \ast {}^{2}\sigma \qquad (1)$$

Dieser Sachverhalt sei nochmals zusammengefasst:

Wirkung	=	Materialeigenschaft	mal	Ursache
^{1}P	=	^{3}d	$\ast$	$^{2}\sigma$
Polarisation	=	piezoelektrischer Tensor	mal	Spannungstensor

Da $^{2}\sigma$ als Vektor aufgefasst wird, kann ^{3}d übersichtlich als Matrix dargestellt werden, was der Grund für die etwas nachlässige Schreibweise von $^{2}\sigma$ ist. In Komponentenschreibweise hat Gleichung (1) folgende Form:

$$p_{n1} = d_{11}\,\sigma_1 + d_{12}\,\sigma_2 + d_{13}\,\sigma_3 + d_{14}\,\tau_1 + d_{15}\,\tau_2 + d_{16}\,\tau_3$$

$$p_{n2} = d_{21}\,\sigma_1 + d_{22}\,\sigma_2 + d_{23}\,\sigma_3 + d_{24}\,\tau_1 + d_{25}\,\tau_2 + d_{26}\,\tau_3$$

$$p_{n3} = d_{31}\,\sigma_1 + d_{32}\,\sigma_2 + d_{33}\,\sigma_3 + d_{34}\,\tau_1 + d_{35}\,\tau_2 + d_{36}\,\tau_3$$

p_{n1} ist hierin die Komponente der elektrischen Polarisation in Richtung n_1, p_{n2} und p_{n3} sind analog definiert.

Die Moduln d_{11} bis d_{36} bilden den piezoelektrischen Tensor 3.Stufe. Durch ihn wird die materialspezifische, richtungsabhängige Piezoelektrizität beschrieben. Eigentlich wird ein Tensor 3. Stufe durch 27 Moduln beschrieben, die Symmetrie des Spannungstensors reduziert diese Moduln aber auf 18 unterscheidbare Moduln. Die Moduln der ersten Zeile des piezoelektrischen Tensors d_{11} bis d_{16} bestimmen den Wert der Polarisation in Richtung n_1 des orthogonalen Tensorbezugsystems, in dem auch der Spannungstensor angegeben wird. Die Moduln der zweiten Zeile bestimmen die Komponente der Polarisation in Richtung n_2, und die der dritten Zeile bestimmen den Wert der Komponente in Richtung n_3. Die Moduln der ersten drei Spalten des piezoelektrischen Tensors verknüpfen auf den Körper wirkende Kompressions- oder Zugkräfte mit der dadurch hervorgerufenen Polarisation. In den Spalten 4 bis 6 stehen die Moduln des piezoelektrischen Tensors, die die Wirkung der Scherkräfte beschreiben.

Es soll nun anhand von zwei Beispielen gezeigt werden, wie man die einzelnen Moduln des piezoelektrischen Tensors an einem Kubus eines beliebigen Materials bestimmen kann.

.

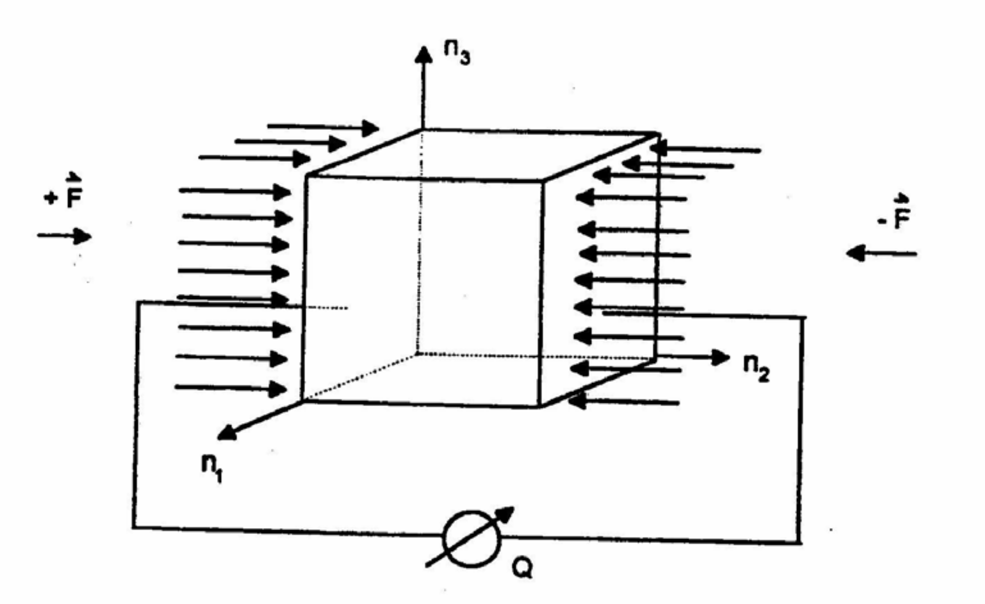


Abb. 4: Messung des Moduls d_{22} des piezoelektrischen Tensors

1. Beispiel: Experimentelle Bestimmung des Moduls d_{22} :

Das Modul d_{22} gehört der zweiten Zeile des obigen Schemas an; daraus folgt, dass eine durch dieses Modul erzeugte Polarisation in Richtung der zweiten Komponente n_2 des Tensorbezugssystems wirkt. Die zu bestimmende Polarisation muss also in der Richtung n_2 gemessen werden. Das Modul d_{22} ist weiter mit dem Modul des Spannungstensors σ_2 verknüpft. Der Kubus des zu untersuchenden Materials muss also einzig der Spannung σ_2 unterworfen werden (siehe Abb.4). Dies ist ein Beispiel zur Messung eines Moduls, welches den sogenannten longitudinalen piezoelektrischen Effekt erfasst.

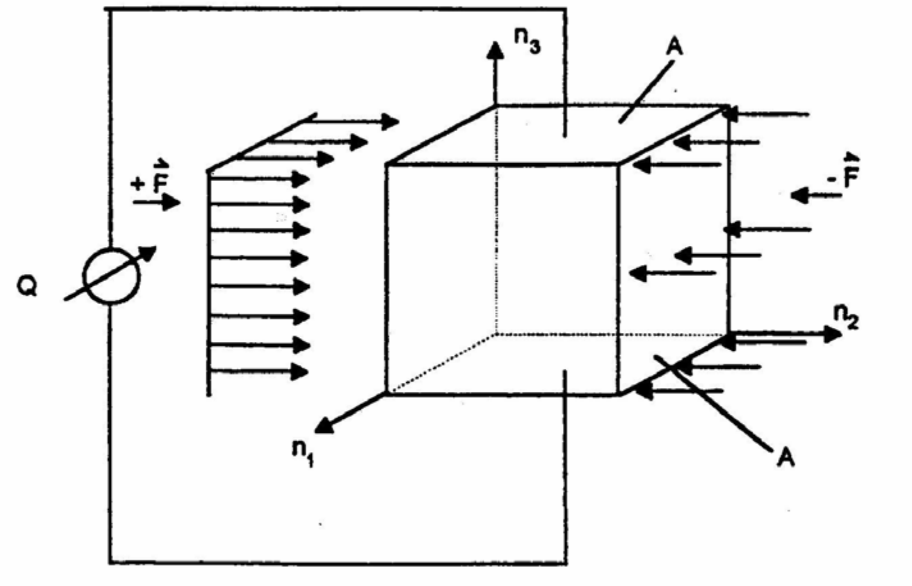


Abb.5: Messung des Moduls d_{32} des piezoelektrischen Tensors

2. Beispiel: Experimentelle Bestimmung des Moduls d_{32} :

Das Modul d_{32} gehört der dritten Zeile des obigen Schemas an; daraus folgt, dass eine durch dieses Modul erzeugte Polarisation in Richtung der dritten Komponente n_3 des Tensorbezugssystems wirkt. Das Modul d_{32} ist mit dem Modul des Spannungstensors σ_2 verknüpft. Der Würfel des zu untersuchenden Materials muss also einzig der Spannung σ_2 unterworfen werden, und die zu erwartende Polarisation muss in Richtung n_3 gemessen werden (siehe Abb. 5). Die Gleichung $^1P = {}^3d\ \sigma_2$ vereinfacht sich zu $p_{n3} = d_{32}\ \sigma_2$. Dies ist ein Beispiel zur Messung eines Moduls, welches den sogenannten transversalen piezoelektrischen Effekt erfasst.

Die bisherigen Betrachtungen gelten prinzipiell für alle Festkörper. Nach dem obigen Schema kann man selbst einen Backstein untersuchen; man wird herausfinden, dass alle Moduln Null sind (warum?). Die Messung der piezoelektrischen Moduln von Einkristallen vereinfacht sich wesentlich (Ausnahme Punktgruppe 1), da aus Gründen der Kristallsymmetrie viele Moduln Null sein müssen oder aber durch einfache Operationen miteinander verknüpft sind. So können, wie schon gesagt, Kristalle aus inversionssymmetrischen Punktgruppen keinen piezoelektrischen Effekt aufweisen. Dies liegt daran, dass aufgrund des Neumannschen Prinzips eine kristallphysika1ische Eigenschaft (hier die Piezoelektrizität) alle Symmetrien der entsprechenden Kristallklassen aufweisen muss. Enthält diese die Inversion als Symmetrieelement, so geht die Einwirkung Spannungstensor nach einer Inversion in sich selbst über, die Auswirkung Polarisation aber in ihr Negatives. Da der Vermittler zwischen diesen beiden, der piezoelektrische Tensor aber als Materialeigenschaft von solchen Operationen nicht abhängen darf, müssen alle seine Komponenten verschwinden. Das bedeutet wiederum, dass der entsprechende Kristall keinen piezoelektrischen Effekt aufweist. Die Aufstellung im Anhang zeigt die Struktur des piezoelektrischen Tensors für alle Punktgruppen. Wichtig ist hierbei, dass die Orientierung des Kristallsystems zum Tensorbezugssystem durch Konvention festgelegt ist. Hier werden folgende Annahmen gemacht:

- Die Achsen des Kristallsystems werden mit x, y, z und die entsprechenden des Tensorbezugssystems mit u, v, w bezeichnet
- Das Tensorbezugssystem ist rechtsorientiert
- Für das monokline Kristallsystem gilt: y | | v
- Für das tetragonale, das trigonale und das hexagonale Kristallsystem gilt: x | | u, z | | w
- Für das orthorhombische und das kubische Kristallsystem gilt: y | | u, y | | v, z | | w

.

Grundwissen:

Folgende Stichworte sollten auf jeden Fall geläufig sein: Piezoelektrischer Effekt (PE), longitudinaler-, transversaler PE, reziproker PE -> Anwendungen, Piezomaterialien; Pyroelektrizität; Tensoren 1., 2. 3. und 4. Stufe

Aufgaben zur Piezoelektrizität

1. Schlagen Sie Experimente vor, mit denen man an einem Kristall der Punktgruppe......... das Modul.......... bestimmen kann und fertigen Sie Skizzen an!
2. Nennen und beschreiben Sie einige konkrete Anwendungsmöglichkeiten der Piezoelektrizität!
3. Warum sind nur 6 von 9 Moduln des Spannungstensors voneinander verschieden?
4. Bestimmen Sie die Elemente des piezoelektrischen Tensors der Punktgruppe............., die identisch Null sein müssen!
5. Warum gibt es keine piezoelektrischen Materialien mit Inversionszentrum?
6. Stellen Sie dar, welche Möglichkeiten es gibt das Modul.............. von.............. zu messen und fertigen Sie Skizzen an!
7. Bestimmen Sie experimentell den Wert des piezoelektrischen Moduls d_{11} von Quarz!

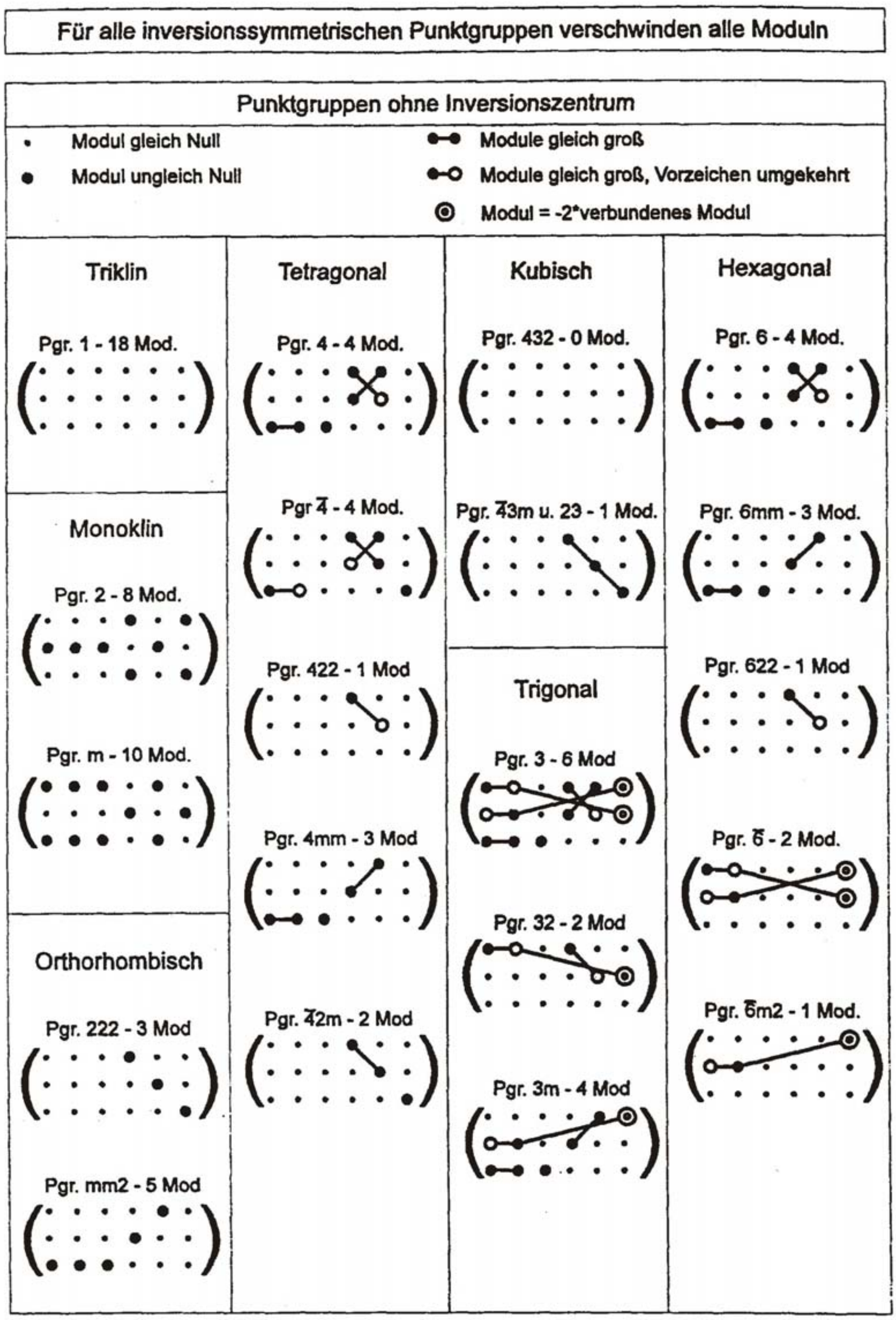
Literatur

Kleber - Einführung in die Kristallographie
Klockmann - Lehrbuch der Mineralogie
Donnay - Crystal Data - Determinative Tables

Anhang 1: Sicherheitsaspekte

Die Praktikanten werden vor Beginn der experimentellen Arbeiten auf die Gefahren im Zusammenhang mit elektrischen Strömen und Spannungen hingewiesen. Ein über das normale Maß im Umgang mit elektrischen Geräten hinausgehendes Gefahrenpotential besteht nicht.

.



Anhang 2: Form der ^{3}d-Matrix für die einzelnen Punktgruppen